$2^{ος}$ τρόπος: άσκηση $V(y^2-x^3-x^2)$ από προηγούμενη διάλεξη

19/04/2019
$8^η$ διάλεξη

$$f(x,y) = \underbrace{E_d(f)}_{\text{ελάχ. βαθμός}}^{\to F_d} + (F_i) + \underbrace{M_n(f)}_{\text{μέγιστος βαθμός}}^{\to F_n}$$

π.χ.: $\underset{F_i}{x^4} + \underbrace{x^2+xy}_{E(f)} \underset{M(f)}{-2x^5} + \underset{F_i}{3x^3}$

Εξέταση αν το $(0,0)$ είναι ιδιόμορφο σημείο.

$x = \lambda t$, $y = \mu t$

$$f(\lambda t, \mu t) = t^d F_d + t^i F_i + t^n F_n$$

• Το $E(f) = F_d(x,y)$ είναι ένα ομογενές πολ/μο d βαθμού άρα, αναλύεται σε γινόμενο d γραμμικών όρων κάθε ένα από αυτούς αντιστοιχεί και σε μια εφαπτ. στο $(0,0)$.

Όπως και πριν, δείχνω ότι το $(0,0)$ είναι ιδιόμορφο.

$$E(f) = y^2 - x^2 = (y-x)(y+x)$$

(Είμαστε στο μιγαδικό ~~πρα~~ επίπεδο)

$1^η$: $y - x = 0$
$2^η$: $y + x = 0$

Εάν θέλω εφαπτομένη σε τυχαίο $P(a,b)$ βρίσκω στο $(0,0)$
$x = X + a$, $y = Y + b$ (κάνω μεταφορά και απαντάω στο (a,b))

Εξίσωση εφαπτομένης στο προβολικό επίπεδο

Έστω $V(F) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

Εξίσωση εφαπτ. στο (x_0, y_0, z_0) : $\boxed{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\cdot X + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\, Y + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\, Z = 0}$

Επίσης, στο προβολικό επίπεδο $P(x_0, y_0, z_0)$ ιδιόμορφο $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) = \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) = 0$$

Άσκηση: Δίνεται η καμπύλη $V\left((x^2-y^2)^2 + (2x^2-6y^2)z^2\right) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ να βρεθούν ιδιόμορφα σημεία (αν υπάρχουν) και οι εφαπτόμενες σε αυτά.

Λύση

Σημεία Ιδιομορφίας

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow 2(x^2-y^2)\cdot 2x + 4xz^2 = 0 \Leftrightarrow x(x^2-y^2+z^2) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow -2(x^2-y^2)\cdot 2y - 12yz^2 = 0 \Leftrightarrow y(x^2-y^2+3z^2) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow 2z(2x^2-6y^2) = 0 \Leftrightarrow z(x^2-3y^2) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ή } x^2-3y^2=0 \end{cases}$$

Προσοχή να μην ξεχάσω περιπτώσεις (συχνό λάθος)

Άρα, έχω το $(0,0,0)$ το οποίο εξαιρείται

• Για $\boxed{z=0}$ πρέπει $\begin{cases} x(x^2-y^2)=0 \\ \text{και} \\ y(x^2-y^2)=0 \end{cases}$

$x(x^2-y^2)=0$:
- $x=0 \Rightarrow -y^3=0 \Rightarrow y=0$
- $x^2-y^2=0 \Rightarrow x=\pm y$: $x=y$: $\boxed{(1,1,0)}$, $x=-y$: $\boxed{(-1,1,0)}$

$y(x^2-y^2)=0$:
- $y=0 \Rightarrow x^3=0 \Rightarrow x=0$ $(0,0,0)$ εξαιρείται
- $x^2-y^2=0 \Rightarrow x=\pm y$ όμοια με πριν, τα ίδια σημεία

• Για $x^2-3y^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{3}y \\ \text{ή} \\ x=-\sqrt{3}y \end{cases}$

για $x=\sqrt{3}y$:
- $\sqrt{3}y(3y^2-y^2+z^2)=0 \Leftrightarrow \sqrt{3}y(2y^2+z^2)=0$
- $y(3y^2-y^2+3z^2)=0 \Leftrightarrow y(2y^2+3z^2)=0$
  - $y=0 \Rightarrow z=t$ και $x=0$ με $t\in\mathbb{R}^*$ $(0,0,1)$
  - $y\neq 0$ άρα $\begin{cases} 2y^2+z^2=0 \\ 2y^2+3z^2=0 \end{cases} \Rightarrow z=0$ άτοπο για $z\neq 0$ άρα, $\nexists$ σημείο

Όμοια, για $x=-\sqrt{3}y$.

Επομένως, τα σημεία που βρήκαμε είναι τα $(1,1,0)$, $(-1,1,0)$, $(0,0,1)$

Εύρεση Εφαπτομένης στο (1,1,0)

$$\Big(\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}_{0}\cdot X + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}_{0}\cdot Y + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}_{0}\cdot Z = 0$$

(ως ιδιόμορφο σημείο)

Άρα, με αυτόν τον τύπο δεν μπορώ να βρω την εφαπτομένη

$\boxed{\text{Α' τρόπος}}$

1) Απο-ομογενοποιώ και βρίσκω εξ. εφαπτ. στο $\mathbb{K}^3$
2) Ομογενοποιώ, επιστρέφω στο $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ και απαντάω.

(1) Θέλω στο $(1,1,0)$
απο-ομογενοποιώ θέτοντας $y=1$

Άρα, $f(x,z) = (x^2-1)^2 + (2x^2-6)z^2$
Ψάχνω εφαπτόμενες στο $(1,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4x + 4xz^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 4x^2 z - 12z$$

άρα, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \frac{\partial f}{\partial z}(1,0) = 0$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 4 + 4z^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 4x^2 - 12$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 8xz$$

άρα,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 8$

$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(1,0) = -8$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(1,0) = 0$

Εξίσωση [illegible]:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0)(x-1)^2 + \cancel{2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x-1)(z-0)} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z-0)^2 = 0$$

$$\cancel{2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x-1)(z-0)} \to 0$$

$$\Rightarrow 8(x-1)^2 - 8z^2 = 0 \iff$$

$$\iff (x-1-z)(x-1+z) = 0$$

Άρα, εξισώσεις εφαπτομένων είναι $\begin{cases} x-1-z=0 \\ x-1+z=0 \end{cases}$

(2) Ομογενοποίηση (ίδια μεταβλητή με την αντίστοιχη στη απο-ομογενοπ.)

$$\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \quad \boxed{\begin{cases} x-y-z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}}$$

(Β') Τρόπος Απο-ομογενοποιώ ως προς $x=1$

$$f(y,z) = (1-y^2)^2 + (2-6y^2)z^2$$

Θέτω $\boxed{y=Y+1, \quad z=Z}$ (*)

Άρα, $(1-(Y+1)^2)^2 + (2-6(Y+1)^2)Z^2 = 0$ ... προκύπτει πολ/μο Y, Z

Κρατάω μόνο τα αντίστοιχα $E(f)$ (ελαχιστοβάθμιους)

$\to E(f) = 4(y-z)(y+z)$

Άρα, οι ζητούμενες εξισώσεις είναι $\begin{cases} y-z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \xLeftrightarrow[\text{μέσω } \circledast]{\text{επιστρέφω στο}} (1,0)$

Άρα: $\begin{cases} y-1-z=0 \\ y-1+z=0 \end{cases} \xrightarrow[\text{βάζονται } x]{\text{ομογεν.}} \boxed{\begin{cases} y-x-z=0 \\ y-x+z=0 \end{cases}}$

Ασύμπτωτες

Ορισμός: Ορίζουμε ως ασύμπτωτη μιας επίπεδης αλγεβρικής καμπύλης $V(f)$ οποιαδήποτε ευθεία του επιπέδου, της οποίας η αντίστοιχη στο προβολικό επίπεδο είναι εφαπτόμενη της $V(F)$ στα σημεία στο ∞.

(Αυτός ο ορισμός μας περιγράφει πλήρως την εύρεση των ασυμπτώτων)

- Έστω $V(f) \xrightarrow{\text{ομογ.}} V(F) \longrightarrow$ εύρεση σημείων ∞ $\longrightarrow$ εφαπτομ. σε αυτά $\xrightarrow{\text{απο-ομ.}}$ επιστροφή στο $\mathbb{R}^3$ και απάντηση.

Παράδειγμα: Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι ασύμπτωτες της $V(x^2-4y^2+2x-4y+13)$

Ομογενοποίηση: $f(x,y) = x^2-4y^2+2x-4y+13 \Rightarrow F(x,y,z) = x^2-4y^2+2xz-4yz+13z^2$

Σημεία$_\infty$ $F(x,y,0)=0 \Leftrightarrow x^2-4y^2=0 \to \begin{cases} x=\pm 2y \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (2,1,0) \\ (-2,1,0) \end{matrix}$

Έλεγχος εάν τα σημεία είναι απλά

$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2z \qquad \frac{\partial F}{\partial x} \begin{cases} (2,1,0) = 4 \\ (-2,1,0) = -4 \end{cases}$

$\frac{\partial F}{\partial y} = -8y - 4z \qquad \frac{\partial F}{\partial y} \begin{cases} (2,1,0) = -8 \\ (-2,1,0) = -8 \end{cases}$

$\frac{\partial F}{\partial z} = 2x - 4y + 26z \qquad \frac{\partial F}{\partial z} \begin{cases} (2,1,0) = 0 \\ (-2,1,0) = -8 \end{cases}$

Άρα,

$(2,1,0)$: $4x-8y+0z=0 \Leftrightarrow$ ~~x-2y=0~~ $x-2y=0$

$(-2,1,0)$: $-4x-8y-8z=0 \Leftrightarrow$ $x+2y+2z=0$ ~~x+2y+2z=0~~

απο-ομογενοποιώ → επιστροφή στο $\mathbb{R}^3$

άρα, $\boxed{\begin{matrix} x-2y=0 \\ x+2y+2=0 \end{matrix}}$

ασύμπτωτες

Εύρεση Σημείων Καμπής (χωρίς χρήση ορισμού)
(απλό με $I_P(f,\varepsilon) \geq 3$)

Ορισμός (Εσσιανή ορίζουσα): Έστω ένα (ομογενές) πολυώνυμο f, d βαθμού με $d \geq 3$. Τότε ορίζουμε

$$H_F = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}$$

(καλείται Εσσιανή του f)

με $\deg(H_F) = 3(d-2)$

Θεώρημα: Ένα σημείο $P(x_0,y_0,z_0) \in V(F)$ είναι σημείο καμπής αν-ν είναι απλό σημείο και $H_F(P) = 0$

Εύρεση σημείων καμπής

Λύνω το (Σ) $\begin{cases} F(x_0,y_0,z_0) = 0 \\ \text{και } H_F(x_0,y_0,z_0) = 0 \end{cases}$ και εξαιρώ τα σημεία ιδιομορφίας

Π.χ.: Να βρεθούν τα σημεία καμπής $V(x^3+y^3-3xyz) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

Θέλω να βρω σημεία καμπής. Άρα, μη-ιδιόμορφα σημεία που μηδενίζουν την Εσσιανή.

Βρίσκω ιδιόμορφα (ώστε να εξαιρέσω από $H_F = 0$)

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0 \iff 3x^2 - 3yz = 0 \quad (1) \\[2ex]
\dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 \iff 3y^2 - 3xz = 0 \quad (2) \\[2ex]
\dfrac{\partial F}{\partial z} = 0 \iff -3xy = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ή} \\ y = 0 \end{cases}
\end{cases}
$$

• Για $x=0 \overset{(2)}{\Longrightarrow} y=0 \overset{(1)}{\Longrightarrow} z=t\neq 0$ Άρα, $(0,0,1)$

• Για $y=0 \overset{(1)}{\Longrightarrow} x=0 \overset{(2)}{\Longrightarrow} z=t\neq 0$ Άρα

Επομένως, $(0,0,1)$ το μοναδικό ιδιόμορφο σημείο.

$$
H_F = \begin{vmatrix} 6x & -3z & -3y \\ -3z & 6y & -3x \\ -3y & -3x & 0 \end{vmatrix} = \dots = -54(x^3+y^3+xyz)
$$

Άρα, σημεία καμπής

$$
\begin{cases} x^3+y^3-3xyz=0 \\ x^3+y^3+xyz=0 \end{cases} \iff 4xyz=0
$$

$\to x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow z=t$

$(0,0,1)$ απορρίπτεται λόγω περιορισμ.

$\to y=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow z=t$

$\to z=0 \Rightarrow x^3+y^3=0 \iff$

$\iff (x+y)(x^2-xy+y^2)=0 \iff$ $x+y=0$ ή $x^2-xy+y^2=0$

$\to x+y=0 \Rightarrow x=-y$ $\boxed{(1,-1,0)}$ σημείο καμπής

$\to x^2-xy+y^2=0$

$x_{1,2} = \dfrac{y\pm\sqrt{y^2-4y}}{2} = \dfrac{y\pm\sqrt{3}iy}{2}$ $\xrightarrow{y=1}$ $\boxed{\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}, 1, 0\right), \left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}, 1, 0\right)}$ σημεία καμπής